Αριθμητική Ανάλυση No. 1 Date 30/10/2019

Αριθμητική Επίλυση Μη Γραμμικών Εξισώσεων

Για πολυωνυμικές εξισώσεις υπάρχουν αναλυτικοί τύποι για μέχρι 4ου βαθμού μόνο σε ειδικές περιπτώσεις για πολ. βαθμού > 4ου.

Πρόβλημα: Να βρεθεί η ρίζα της $f(x) = x^2 - 2 = 0$.
Οι ρίζες είναι $x^* = \pm\sqrt{2}$.
Για την εύρεση του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$ με προσέγγιση και άγ. χρησιμοποιούμε μέθοδο αριθμητική.

Πρόβλημα: Δοθείσης f να βρεθεί x^* τ.ω. $f(x^*) = 0$.
$f \in C(I) = C[a,b] = \{ f: \text{συνεχής στο } [a,b] \}$

Ο χώρος όλων των συν/τήσεων που είναι συνεχής

$f \in C^n(I) = \{ f: \text{συνεχής και συνεχής } n \text{ φορές παρ/μες στο } I \}$

- **Μέθοδος Διχοτόμησης (Bolzano)**

συνάρτηση πρόσημο (εξετάζει αν είναι θετική, αρνητική)

Έστω $f \in C[I]$, $I = [a,b]$ και $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Τότε υπάρχει $x^* \in [a,b]$ τ.ω. $f(x^*) = 0$.
Αν $f(a) = 0$ ή $f(b) = 0$ τότε $x^* = a$ ή $x^* = b$.
αντίστοιχα. Αλλιώς $f(a)f(b) < 0$. Από το Θ.Ε.Τ. προκύπτει ότι $\exists x^* \in (a,b)$ τ.ω. $f(x^*) = 0$.

Προσεγγίζουμε τη ρίζα με το μέσο του $[a,b]$ $c = \frac{a+b}{2}$. Αν $f(c) = 0$, τότε $x^* = c$, αλλιώς αν $f(a) \cdot f(c) < 0$ τότε $x^* \in [a,c]$.

- αν $f(a) \cdot f(c) > 0$, τότε $x^* \in [c,b]$.

Η διαδικασία συνεχίζεται για το νέο διάστημα. Βρίσκουμε μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ των διαδοχικών μέσων των διαστημάτων, η οποία θα συγκλίνει στο x^*.

Έστω $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$ και $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 2, 3, \dots$
Η ακολουθία των υποδιαστημάτων που παράγεται και $\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$ η ακολουθία των μέσων $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $x_3 = \frac{a_3+b_3}{2}$

Προφανώς: $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots$

$= \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$

$|\varepsilon_n| = |x_n - x^*| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$

a_n x_n b_n

Η ακολουθία $\frac{b_1 - a_1}{2^n}$ είναι μηδενική.

Επομένως, $\lim_{n \to \infty} x_n \to x^*$

Αν επιθυμούμε ακρίβεια με εφαρμογή το πολύ $\varepsilon > 0$, απαιτούμε το $\frac{b_1 - a_1}{2^n} \le \varepsilon \iff$

$\log\left(\frac{b_1 - a_1}{2^n}\right) \le \log\varepsilon \iff \log(b_1 - a_1) - n\log 2 \le \log\varepsilon \iff$

$n \ge \frac{\log\left(\frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}\right)}{\log 2} = \log_2 \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}.$

Το μικρότερο δυνατό n είναι το άνω ακέραιο μέρος

άνω

$$\left\lceil \frac{\log\left(\frac{b_1-a_1}{\varepsilon}\right)}{\log 2} \right\rceil$$

Άσκηση 2.1 Α-Δ: Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x^3-x-1$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα που βρίσκεται στο $[1,2]$. Με $[a,b]=[1,2]$ υπολογίστε τη δεύτερη προσέγγιση της x^* με τη μέθοδο διχοτόμησης. Πόσα βήματα της μεθόδου απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης που απέχει 10^{-6} το πολύ από την x^*.

▶ $f(1)=-1<0$, $f(2)=5>0$, $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists x^*\in[1,2]$ τω. $f(x^*)=0$

Κάνω διερεύνηση της f: $f'(x)=3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}$

$f'(x)>0$, $x\in\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow f(x):\uparrow$ (αύξουσα)

$f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^3-\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)-1=\frac{-\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}-1=\frac{2\sqrt{3}}{9}-1<0$

$\Rightarrow f(x)<0$, $x\in\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right]$

$F'(x)<0$, $x\in\left(-\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3\right) \rightarrow f:\downarrow$ (φθίνουσα)

$\Rightarrow f(x)<0$, $x\in\left[-\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3\right]$

$f'(x)>0$, $x\in\left(\sqrt{3}/3,+\infty\right) \Rightarrow f:\uparrow$ (γνησίως αύξουσα)

$\Rightarrow \exists$ το πολύ μια ρίζα στο $\left(\sqrt{3}/3,+\infty\right)$

$\Rightarrow \exists$ ακριβώς μια ρίζα στο $[1,2]$.

$[a,b]=[1,2]$, $x_1=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)-1=\frac{7}{8}>0$

$x^* \in [a, x_1]$, αφού $f(a)\cdot f(x_1) < 0$, $I_2 = [a_2, b_2] = [1, 3/2]$

$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ η δεύτερη προσεγ. της x^*

$n \geq \frac{\log \frac{b_1-a_1}{\varepsilon}}{\log 2} = \frac{\log \frac{1}{10^{-6}}}{\log 2} = \frac{\log 10^6}{\log 2} = \frac{6}{0{,}301} =$

$= 19{,}9316 \Rightarrow \boxed{n=20}$

Έστω $f(x)=0$. Τροποποιούμε αυτήν ως:
$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$ αρκεί να ισχύει ότι $f(x^*)=0 \Leftrightarrow$
$x^*=\varphi(x^*)$: σταθερό σημείο της φ
Αυτό μας οδηγεί στην κατασκευή μιας ακολουθίας $(x_n)_{n=0}^{\infty}$
ως εξής: $x_0 \in I = [a,b]$, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$
Αν η ακολουθία συγκλίνει και φ συνεχής, τότε θα συγκλίνει στο x^*.

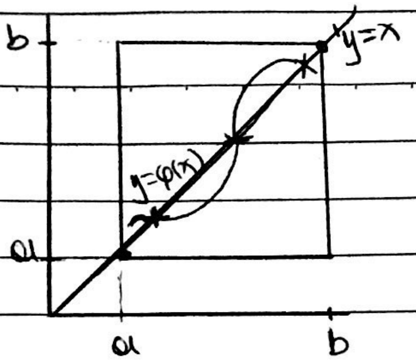
$y = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(y) \Rightarrow$

y σταθερό σημείο της φ: $y = x^*$.

Έστω $\varphi \in C[a,b]$, $\varphi: [a,b] \to [a,b]$. Τότε υπάρχει σταθερό σημείο $x^* \in [a,b]$ της φ.

Απόδειξη: Από τον ορισμό, έχουμε ότι $\varphi(a) \geq a$ και $\varphi(b) \leq b$.
(1) Αν $\varphi(a)=a$, τότε $x^*=a$ → Μπορεί να ισχύουν και συγχρόνως (περισσότερα από 1 σταθερά σημεία)
(2) Αν $\varphi(b)=b$, τότε $x^*=b$.
(3) $\varphi(a)>a$ και $\varphi(b)=b$. Τότε θεωρούμε την
$g(x)=\varphi(x)-x$, $g(a)>0$, $g(b)<0$. Από Θ.Ε.Τ.

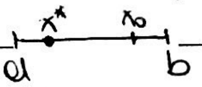
$\exists x^* \in [a,b]$ τ.ω. $g(x^*)=0 \Leftrightarrow \varphi(x^*)-x^*=0 \Leftrightarrow$
$x^*=\varphi(x^*)$ σταθερό σημείο.



Ορισμός: Έστω $\varphi: [\alpha,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C[\alpha,b]$. Η φ τηρεί τη συνθήκη Lipschitz στο $[\alpha,b]$ αν υπάρχει $\alpha>0$ τ.ω. $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \alpha|x-y|$ $\forall x,y \in [\alpha,b]$. Αν $\alpha<1$ τότε η φ είναι συστολή στο $[\alpha,b]$.

Θεώρημα Συστολής: Έστω $\varphi: [\alpha,b] \to [\alpha,b]$ συστολή στο $[\alpha,b]$ με σταθερά συστολής $\alpha<1$. Τότε η φ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $x^* \in [\alpha,b]$. Η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ που παράγεται από την $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ με $x_0 \in [\alpha,b]$ είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*. Για το σφάλμα $|x_n - x^*|$ ισχύουν

(1) $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq$



$\leq L^n \max\{b-x_0, x_0-\alpha\}$

(2) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$

(3) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$.

Απόδειξη: Ακριβώς. Έστω ότι υπάρχουν δύο σταθ. σημεία $x^*, x^{**} \in [\alpha,b]$.

$|x^* - x^{**}| = |\varphi(x^*) - \varphi(x^{**})| \leq L|x^* - x^{**}| < |x^* - x^{**}|$ ΑΤΟΠΟ

Καλά ορισμένη. Προφανώς από το ότι $\varphi: [\alpha,b] \to [\alpha,b]$

$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \leq L|x_{n-1} - x^*| \leq L^2|x_{n-2} - x^*| \leq \ldots$
$\ldots \leq L^n|x_0 - x^*| \leq L^n \max\{b-x_0, x_0-\alpha\}$

$\lim_{n\to\infty}|x^n - x^*| \leq \lim_{n\to\infty} L^n|x_0 - x^*| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \to x^*$

Η ακολουθία είναι Cauchy:

$|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq L|x_1 - x_0|$

$|x_3 - x_2| \leq L|x_2 - x_1| \leq L^2|x_1 - x_0|$

$\vdots$

$|x_n - x_{n-1}| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|$

$|x_{n+k} - x_n| = |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \leq$

$\leq |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| =$

$= (L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + a^n)|x_1 - x_0| =$

$= L^n(L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + 1)|x_1 - x_0| = \frac{a^n(1-L^k)}{1-L}|x_1 - x_0| \leq$

$\leq \frac{a^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$

$\lim_{k\to\infty}|x_{n+k} - x_n| = |x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$

Για $n=1$ η (2) δίνει $|x_1 - x^*| \leq \frac{a}{1-L}|x_1 - x_0|$ (4)

$\forall x_0 \in [a,b]$

Επιλέγω $x_0 = x_{n-1}$ τότε η (4) γίνεται:

$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$. Και αποδείχθηκε η (3).